

作业五 (11月17日课堂上交)

1. 证明自然数上乘法的结合律 (这里自然数和其上的乘法是基于 Peano 公理定义的, 如课件中一样)。换言之, 证明

$$(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k) \quad \forall m, n, k \in \mathbb{N}.$$

注: 可以直接使用所有课件中出现的关于自然数加法和乘法的结论 (加法交换律、结合律、消去律、乘法交换律、乘法和加法的分配律、课件中出现的引理、断言等等)。

2. 对于两个自然数 $m, n \in \mathbb{N}$, 我们说 $m \leq n$, 如果存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $m + k = n$ 。我们说 $m < n$, 如果 $m \leq n$ 且 $m \neq n$ 。 $m \leq n$ 有一种等价记法为 $n \geq m$, $m < n$ 有一种等价记法为 $n > m$ 。

i) 如果自然数 a, b, c 满足 $a \leq b$ 且 $b \leq c$, 证明 $a \leq c$ 。

ii) 如果自然数 a, b 满足 $a \leq b$ 且 $b \leq a$, 证明 $a = b$ 。

iii) 证明: 自然数 a, b 满足 $a < b$ 当且仅当 $b = a + k$, 其中 $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ 。

iv) 如果自然数 a, b 满足 $a < b$, 则 $b < a$ 不可能成立。

v) 如果自然数 a 和 b 满足 $a = b$, 则 $a < b$ 和 $b < a$ 均不可能成立。

vi) 给定两个自然数 a 和 b , 证明一定存在自然数 c , 使得 $a \leq c$ 且 $b \leq c$ 。

vii) 给定两个自然数 a 和 b , 证明一定存在自然数 c , 使得 $a < c$ 且 $b < c$ 。

viii) 给定两个自然数 a 和 b ，证明一定存在自然数 c ，使得 $c \leq a$ 且 $c \leq b$ 。

ix) 如果自然数 a, c 满足 $c \leq a$ 且 $c \neq a$ ，则 $c^+ \leq a$ 。

x) 给定两个自然数 a 和 b ，证明一定存在自然数 c ，使得 $c \leq a$ 、 $c \leq b$ ，且 c 等于 a 和 b 中的某一个。

xi) **自然数序关系的三歧律 (trichotomy)**：对于任何两个自然数 a 和 b ，证明以下三种情况**必有一种**成立，**且仅有一种**成立

$$a < b$$

$$a = b$$

$$a > b \text{ (或等价的记法, } b < a \text{)}$$